Correction du test : suites et complexes (sujet A)

Correction de l'exercice 1

Initialisation : pour $p=0$, d'une part $(1+h)^0=1$ et d'autre part $1+0\times h=1$ donc $(1+h)^0\geqslant 1+0\times h$ donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : On suppose qu'il existe k un entier naturel tel que $(1+h)^k\geqslant 1+k\,h$
En multipliant par $1+h>0$ (en effet $h\geqslant 0$), on obtient l'inégalité

$(1+h)\times(1+h)^k\geqslant(1+h)\times(1+k\,h)$

soit en distribuant $(1+h)^{k+1}\geqslant 1+h+k\,h+k\,h^2$

soit encore $(1+h)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)h+k\,h^2$

Or $k\,h^2\geqslant 0$ donc $1+(k+1)h+k\,h^2\geqslant 1+(k+1)h$

donc $(1+h)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)h$.
Finalement la propriété est vraie pour l'entier suivant $k+1$.
Conclusion : Par récurrence pour tout $p\in\mathbb{N}$, $(1+h)^p\geqslant 1+p\,h$.

Correction de l'exercice 2

Notons que pour tout entier naturel n, $u_n=n\times(n-3)+100$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-3)=+\infty$ et par produit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$.

Notons que pour tout entier naturel $n\neq 0$, $t_n=\dfrac{n^2\left(-9+\frac{3}{n}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n^3}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$ on obtient alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-9\,n^2}{2n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-9}{2n}=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=0}$.

Correction de l'exercice 3

1. $u_1=u_0+2\times 0+2=2$ et $u_2=u_1+2\times 1+2=6$ donc $\boxed{u_1=2 \text{ et } u_2=6}$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=2n+2>0$ donc $u_{n+1}>u_n$
   donc la suite $\boxed{(u_n)\text{ est strictement croissante}}$.
3. La limite de la suite (u_n) semble être $+\infty$.
4. **Initialisation** : pour $n=0$, d'une part $0\times(0+1)=0$ et d'autre part $u_0=0$
   donc la propriété est vraie pour $n=0$.
   Hérédité : On suppose qu'il existe k un entier naturel tel que $u_k=k(k+1)$
   Or $u_{k+1}=u_k+2k+2=k(k+1)+2k+2=k(k+1)+2(k+1)=(k+2)(k+1)=(k+1)(k+2)$
   donc la propriété est vraie pour l'entier suivant $k+1$.
   Conclusion : Par récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=n(n+1)$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ donc par produit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$.

Correction de l'exercice 4

1. $z_1=\mathrm{i}\,(9+12\mathrm{i}-4)=\mathrm{i}\,(5+12\mathrm{i})=-12+5\mathrm{i}$ donc $\boxed{z_1=-12+5\mathrm{i}}$.

   $z_2=\dfrac{\mathrm{i}}{4-3\,\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}\,(4+3\,\mathrm{i})}{(4-3\,\mathrm{i})\,(4+3\,\mathrm{i})}=\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{4^2+3^2}=\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{25}=-\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}\,\mathrm{i}$ donc $\boxed{z_2=-\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}\,\mathrm{i}}$.
2. $z_3=3+\mathrm{i}+1=4+\mathrm{i}$ donc $\boxed{\mathrm{Re}(z_3)=4 \text{ et } \mathrm{Im}(z_3)=1}$.

Correction de l'exercice 5

1. C'est Faux. Il suffit de prendre une suite dont les premiers termes ne sont pas dans un ordre croissant.

   On peut même construire une suite (w_n) qui n'est jamais croissante.

   Par exemple pour tout n est pair, $w_n = 2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ et $w_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$.

2. C'est vrai. $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n - 2 = 0$ et $w_n - 2 < 0$ donc $t_n < 0$

   donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = -\infty$.